I　共立関係計算体系

共立関係計算体系は，複合関係が同時に成り立つ関係を扱う計算法の体系である。

1　記　号

はじめに，関係計算に用いる記号を定めておくことにしよう。関係計算に用いる記号は次のとおりである。

① 式：A，B，C…
② 定項：a，b，c…
③ 変項：x，y，z
④ 関係記号：♯，エ，⌽，⤙
　　縛り関係記号：エ^{n}，エ^{t}，エ^{s}，⌽^{1}，⌽^{2}，⌽$^{+}$，⌽$^{-}$
⑤ 関係変化記号：$\mathcal{C}$
⑥ 項間変化記号：$\mathcal{P}$
⑦ 導出記号：→
⑧ 関係同値：≡
⑨ 複合関係の共立関係記号：・

以上のほかにも，必要に応じ他の記号も導入できるものとしておく。上記の記号で→は“ならば”と読むことにし，≡は“関係同値”と読むことにしておきたい。→は前件が後件を含意していることによる導出を意味し，≡は左辺と右辺の関係が同じであることを表している。

2　関係記号の説明

(1)　♯

♯は組合せ関係を表す記号で，“組合せ”または“組み”と読むことにしておこう。われわれの直視や思考の対象で，一定の範囲にあるものを一つの全体とみなすとき，それを集合といい，その範囲内の個々の対象をその集合の要素（element）というが，♯は，

集合C $\{a，b……\}$

におけるa，b……の関係を表している。これは，ある範囲内にともに存在するというだけの関係で，2要素間のみならず，3要素以上の間にもみられることはいうまでもない。

(2)　エ

エは順序関係を表す記号で，“順序”または“順”と読むこととする。これはいわゆる順序のある場合で，順序の基準は大小であれ優劣であれ何でもかまわないのである。

順序は元来包含関係や大小関係から抽象されたものであるから，後で述べる包含は順序でもある。また，順序関係がある場合には，そこに組合せ関係が内包されていることもここで指摘しておくことにしよう。

(3)　ↀ

ↀは結合関係を表す記号で，“結合”または“結び”と読むこととする。結合関係は，最広義には，集合 A の要素 a と集合 B の要素 b との間に何らかの対応（結びつき）がある場合をさしている。これは非常に幅広い概念であるが，そのうち a と b の対応に関する関係規則（対応規則）f が確定できる場合は，

$$f : A \to B$$

となり，関数関係となる。

なお，結合関係の場合も，順序関係と同じように，そこに組合せ関係が内包されている。結合関係も，組合せ関係があってはじめて成り立つのである。

(4)　⤙

⤙は包含関係を表す記号で，“包含”または“包み”と読むことにしよう。この記号を使う場合は，⤙の前件が後件を包含することを意味している。例えば，A ⤙ B は A が B を包含していることを意味している。

包含関係も組合せ関係を内包しているし，前述のように順序関係は包含関係からとり出されているから，包含関係は順序関係を内包している。

3　縛り関係記号の説明

縛りとは関係をさらに特定の種類に限定することである。

(1)　結合関係の縛り

①　方向性の縛り

ↀ^{1}……一方向の結合（“結合一方向”と読む）

ↀ^{2}……双方向の結合（“結合双方向”と読む）

②　親和性の縛り

ↀ$^{+}$……親和的な結合（“結合プラス”と読む）

ↀ$^-$……対立的な結合（“結合マイナス”と読む）

(2) 順序関係の縛り

① 数量的な縛り

エ^n……数量的な順序（大小など）（“順序エヌ”と読む）

a エ^n b は $a > b$ とする。

② 時間的な縛り

エ^t……時間の順序（前後など）（“順序ティー”と読む）

a エ^t bは a が b より時間的に先行していることを示すこととする。

③ 空間的な縛り

エ^s……空間上の順序（上下，左右，前後など）（“順序エス”と読む）

a エ^s b の場合，空間的順序の基準はエ^{s}を使用する際に示すこととする。

4 関係変化記号の説明

ある関係が別の関係になることを関係の変化という。

(1) 変化記号：C

(2) 変化の表現法：変化前の関係をCの下方に，変化後の関係をCの上方に記すこととする。

例：$C^{ↀ}_{\#}$（a ＃ b）≡ a ↀ b

（読み方）$C^{ↀ}_{\#}$は“＃からↀへの変化”または“変化＃，ↀ”と読む

（単に“ロングC＃，ↀ”と読んでもよい）。

(3) 使用規則

① 変化記号が適用される範囲にはかっこをつけることとする。

例：$C^{ↀ}_{\#}$（a ＃ b）＃ $c \prec d$ ≡ a ↀ b ＃ $c \prec d$

a ↀ $C^{ↀ}_{\prec}$（$b \prec c$）エ d ≡ a ↀ（b ↀ c）エ d

② 変化記号はいくつ重ねて使ってもよい。

例：$C^{ↀ}_{\#}C^{エ}_{ↀ}$（a ＃ b ↀ c）≡ a ↀ b エ c

この例でもわかるように，変化記号は与式の関係の変化を示すもので変化の過程を示すものではない。この例でいえば，$C^{ↀ}_{\#}C^{エ}_{ↀ} \rightarrow C^{エ}_{\#}$ではないのである（＃→ↀ，ↀ→エ　∴＃→エではない）。

5 項間変化記号の説明

順序関係，包含関係の式における項間の置換を項間変化という。

(1) 項間変化記号：P

(2) 項間変化の表現法：Pの次に置き換える項を記し，その次に与式（項間変化が行われる式）を記すこととする。

例：P（a b）($a \prec b$) $\equiv b \prec a$

P（a b c）(a エ b エ c) $\equiv$ b エ c エ a

P（a b）（c d）(a エ b エ c エ d) $\equiv$ b エ a エ d エ c

（読み方）Pは置換またはpermutationと読む。

P（a b c）は“置換a，b，c”と読む（単に“ピーa，b，c”と読んでもよい)。

(3) 説明

順序関係と包含関係には後述するように交換規則を適用できない。しかし，要素間の相互関係によったり，外部からのインパクトによって変化が生ずることがある。項間変化はそのことを表現するために設けられたものである。もちろん，関係計算の途中でこのような変化を仮定として導入し，推論や予測を行うこともできる。

6 共立関係記号の説明

二つ以上の関係が組合せになっている場合に，それを複合関係と呼ぶ。そして，この複合関係が同時に成り立つ場合に，それを共立関係という。

(1) 共立関係記号：・

(2) 共立関係の表現法

例えば，a ⊕ bとa エ bが共立関係にあれば，次のように表すことができる。

a ⊕・エ b

この場合には関係記号を並べる際の優先順位が問題となるが，どちらを先に出しても同じで，構造が変わるわけではない。したがって，優先順位は特に問わない。

（読み方）・は“共立”と読む。

7 形成規則

記号を定めると，次には記号を配列して式（formula）をつくる形成規則（formation rule）が必要となる。ここでは次の二つを定めておく。

① 文字A，B，C…はそれ自身式である。

② A，Bが式ならば，A ♯ B，A エ B，A ⊕ B，$A \prec B$も式である。さらにA→B，A≡Bもまた式である。